Concours Centrale - Supélec 1999

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Partie I -

Dans cette partie, n désigne un entier naturel *impair*, supérieur ou égal à 3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, et sa base canonique est notée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On appelle A_n la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = (a_{r,s}),\ 1 \le r,s \le n \quad \text{avec } a_{r,s} = \begin{cases} 1 \left(\begin{array}{c}\text{si } r+s=2 \\ \text{ou si } r+s=n+2\end{array}\right) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A_n.

I.A - Calculer $(A_3)^2$ et $(A_5)^2$.

I.B - Pour $2 \le j \le n$, déterminer $u^2(e_j)$. En déduire $(A_n)^2$, pour n entier impair supérieur ou égal à 3.

I.C - On désigne par $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ le noyau et l'image de l'endomorphisme u. Monter que :

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(u - id) \cap \operatorname{Ker}(u + id) = \{0\} \\ \operatorname{Im}(u + id) \subset \operatorname{Ker}(u - id) \\ \dim \operatorname{Ker}(u - id) + \dim \operatorname{Ker}(u + id) = n \end{cases}$$

I.D - En déduire que la matrice A_n est diagonalisable. Expliciter une base de vecteurs propres de A_n ainsi qu'une matrice diagonale semblable à A_n. Montrer que les sous-espaces propres de A_n sont orthogonaux.

I.E - Dans cette question, E est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; M étant un point de E, on note (x, y, z) ses coordonnées dans ce repère. Si k est un réel fixé, on note S_k la surface d'équation $x^2 + 2yz = k$.

I.E.1) Montrer qu'il existe un repère orthonormal $(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dans lequel l'équation de S_k est : $X^2 + Y^2 - Z^2 = k$

Discuter la nature de la surface S_k, en distinguant les cas : $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$.

Dans les questions qui suivent, on prend $k = 1$, et E est muni du repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dont l'existence a été prouvée en I.E.1

I.E.2) Soit M_0 un point du plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$, appartenant à S_1. On notera $(\cos\theta_0, \sin\theta_0, 0)$ les coordonnées de M_0 dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M_0 et perpendiculaire à (OM_0). Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur un vecteur directeur $\vec{V}$ de $\mathcal{D}$ pour que $\mathcal{D}$ soit incluse dans S_1.

I.E.3) Déterminer les droites incluses dans S_1 et rencontrant le plan $(O; \vec{I}, \vec{J})$. Existe-t-il des droites parallèles à $(O; \vec{I}, \vec{J})$ incluses dans S_1 ?

I.E.4) Soit M un point de S_1 de coordonnées (X, Y, Z) dans $\mathcal{R}$. Montrer qu'il existe un réel θ_0 tel que :

$$\begin{cases} X = \cos\theta_0 - Z\sin\theta_0 \\ Y = \sin\theta_0 + Z\cos\theta_0 \end{cases}$$

En déduire que S_1 est la réunion d'une famille de droites qu'on précisera.

Partie II -

Dans cette partie, on prend $n = 5$. On désigne par α le nombre complexe $\alpha = e^{2i\pi/5}$, et par B la matrice de coefficients $b_{r,s} = \alpha^{(r-1)(s-1)}$, pour $1 \le r,s \le 5$.

II.A - Vérifier que :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^4 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{C}^5$ est muni de la base canonique, notée $(e_1, e_2, \ldots, e_5)$. On appelle v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^5$ dont la matrice dans cette base est B, et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est A_5 que l'on notera désormais A.

MA Sujet 99 Bon à tirer TSI Math II 5-10-98.2 version du 26 mai 1999 10:53

II.B -

II.B.1) Écrire le polynôme $X^5 - 1$ comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ et montrer qu'il existe 2 réels a et b tels que :

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$$

En déduire la décomposition de $X^5 - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II.B.2) Déduire de ce qui précède l'expression de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\sqrt{5}$.

II.C - Calculer B^2. Exprimer B^2 en fonction de A.

II.D -

II.D.1) Déduire de ce qui précède que $uov = vou$.

II.D.2) Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_5)$ une base de vecteurs propres de A telle que $u_1 = e_1$ (Cf. I.D). Montrer que A admet deux sous-espaces propres et les déterminer à l'aide des u_i, $1 \le i \le 5$. Montrer que ces sous-espaces propres sont stables par v.

II.D.3) Déterminer $v(e_1)$, $v(e_2 + e_5)$, $v(e_3 + e_4)$ en fonction de e_1, $e_2 + e_5$ et $e_3 + e_4$. De même, déterminer $v(e_2 - e_5)$ et $v(e_3 - e_4)$ en fonction de $e_2 - e_5$ et de $e_3 - e_4$. En déduire que B est semblable à une matrice de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right]$$

où X et Y sont respectivement des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qu'on explicitera.

On notera désormais E_1 et E_{-1} (avec $e_1 \in E_1$) les deux sous-espaces propres de A.

II.E - Soit v_1 l'endomorphisme de E_1 défini par : $\forall x \in E_1$, $v_1(x) = v(x)$ et v_2 l'endomorphisme de E_{-1} défini par : $\forall x \in E_{-1}$, $v_2(x) = v(x)$.

II.E.1) Montrer que v_2 est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.

II.E.2) Montrer que v_1 est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.

II.E.3) Montrer que B est diagonalisable et semblable à :

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Partie III -

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

III.A - $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ étant des nombres complexes, on note V_n la matrice :

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \det V_n$$

III.A.1) Montrer que :

$$\forall n \ge 2 \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \times \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i)$$

III.A.2) En déduire la valeur de Δ_n.

III.B -

III.B.1) En utilisant par exemple la matrice D (définie au II.E.3), montrer qu'il existe un endomorphisme g, ayant toutes ses valeurs propres distinctes, vérifiant $g^2 = v$. On notera μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 ses valeurs propres.

III.B.2) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{C}^5$. On définit la suite $g^n(x)$ par :

$$g^0(x) = x \quad \text{et pour } n \ge 1,\ g^n(x) = g(g^{n-1}(x)) = g \circ g^{n-1}(x)$$

Montrer qu'il existe un entier $p \le 4$ (p dépendant de x) tel que la famille $(g^k(x))_{0 \le k \le p}$ est libre et que la famille $(g^k(x))_{0 \le k \le p+1}$ est liée.

III.B.3) Montrer qu'il existe des vecteurs x pour lesquels $p = 4$, et caractériser ces vecteurs par leurs coordonnées dans une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ de vecteurs propres de g. Un tel vecteur x étant choisi, montrer que $\mathcal{B} = (x, g(x), g^2(x), g^3(x), g^4(x))$ est une base de $\mathbb{C}^5$.

On notera $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ les coordonnées de $g^5(x)$ dans $\mathcal{B}$. Donner la matrice de g dans cette base. En identifiant deux expressions du polynôme caractéristique de g donner l'expression des a_i en fonction des μ_j.

••• FIN •••